2024 鳥取大 医

[I] (1) $\lceil x \rceil = k$ (kは整数)とおく。

$3k^2 - 38k + 55 < 0$ より $(3k-5)(k-11) < 0$

$\frac{5}{3} < k < 11$ kは整数より $k = 2, 3, \cdots, 10$

$k = \lceil x \rceil = 2$ のとき $1 < x \leqq 2$

同様に $k = 3$ のとき $2 < x \leqq 3$

$\cdots$

$k = 10$ のとき $9 < x \leqq 10$

以上より $1 < x \leqq 10$ …(答)

(2) $\lceil x + \frac{4}{3} \rceil = l$ (lは整数)とおく。

$l - 1 < x + \frac{4}{3} \leqq l$ から $l - 2 < x + \frac{1}{3} \leqq l - 1$ $\therefore \lceil x + \frac{1}{3} \rceil = l - 1$

$4l^2 - 52(l-1) + 113 < 0$ $(2l-11)(2l-15) < 0$

$\therefore \frac{11}{2} < l < \frac{15}{2}$ lは整数より $l = 6, 7$

$l = 6$ のとき $5 < x + \frac{4}{3} \leqq 6$

$l = 7$ のとき $6 < x + \frac{4}{3} \leqq 7$

以上より $5 < x + \frac{4}{3} \leqq 7$ $\therefore \frac{11}{3} < x \leqq \frac{17}{3}$ …(答)

(3) $\lceil x^2 \rceil = m$ (mは整数)とおく。

$m - 1 < x^2 \leqq m$ に $m = 2x$ より $x = \frac{m}{2}$ を代入し

$m - 1 < \frac{m^2}{4} \leqq m$

・$m - 1 < \frac{m^2}{4}$ から $(m-2)^2 > 0$ $\therefore m < 2, 2 < m$ …①

・$\frac{m^2}{4} \leqq m$ から $m(m-4) \leqq 0$ $\therefore 0 \leqq m \leqq 4$ …②

①②より mは整数なので $m = 0, 1, 3, 4$

$x = \frac{m}{2}$ より $x = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$ …(答)

2024 鳥取大・医

[Ⅱ]

(1) $\overrightarrow{NQ}=k\overrightarrow{NP}$ (k：実数) とおける

$\overrightarrow{OQ}=(0,0,1)+k(s,t,-1)=(ks,kt,1-k)$

点Qは球面S上にあるので $k^2s^2+k^2t^2+(1-k)^2=1$

$$k^2(s^2+t^2+1)-2k=0$$

ここで $k=0$ とすると $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{ON}$ となり不適なので $k\neq0$ だから

$$k=\frac{2}{s^2+t^2+1}$$

したがって，$\underline{\underline{Q\left(\frac{2s}{s^2+t^2+1},\frac{2t}{s^2+t^2+1},\frac{s^2+t^2-1}{s^2+t^2+1}\right)}}$ …(答)

(2) 点Pが放物線 $y=x^2$, $z=0$ を動くので $t=s^2\geqq0$

$$f(t)=\frac{2t}{t^2+t+1}$$

$$f'(t)=2\times\frac{1\times(t^2+t+1)-t(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}=2\times\frac{1-t^2}{(t^2+t+1)^2}$$

$f'(t)=0$ とすると $t\geqq0$ より $t=1$

このとき，増減表は以下のようになる

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t}}{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=0$$

したがって，$\underline{\underline{\text{最大値 }\frac{2}{3}\text{，最小値 }0}}$ …(答)

2024 鳥取大・医

[Ⅲ]

(1) $(n+1)$秒後にAに移動するのは，n秒後でBかまたはCにいた点から移動してくるので

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \quad \cdots (答)$$

(2) $a_n+b_n+c_n=1$ だから (1)より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-a_n)$$

これは，$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形できる

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1-\frac{1}{3}=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots (答)$$

(3) n秒後に物体が点Aに位置する確率を P_n とおくと，点Aに位置しない確率は $1-P_n$ だから，

$$P_{n+1}=\frac{1}{m-1}(1-P_n)$$

$$P_{n+1}-\frac{1}{m}=\frac{-1}{m-1}\left(P_n-\frac{1}{m}\right)$$

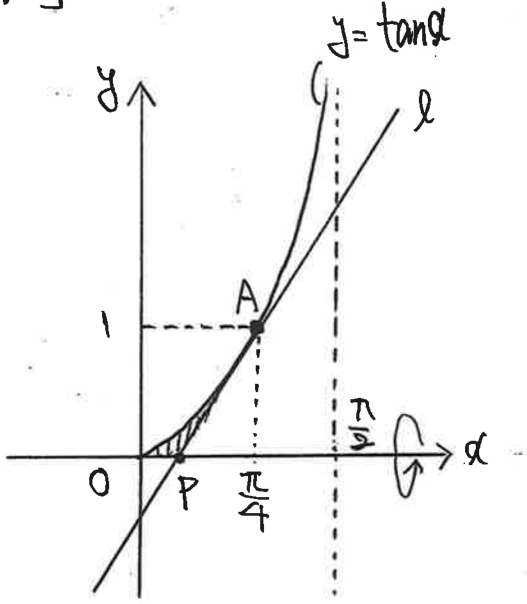
数列 $\left\{P_n-\frac{1}{m}\right\}$ は，初項 $P_1-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m}$，公比 $\frac{-1}{m-1}$ の等比数列だから

$$P_n-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m}\times\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1}$$

$$P_n=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}\times\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1} \quad \cdots (答)$$

2024 鳥取大・医

[IV]



(1) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より点A$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$における接線$l$は

$l:\ y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$l:\ y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$ …(答)

lとx軸との交点Pの座標は$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, 0\right)$ …(答)

(2)
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx - \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\} \times 1$$
$$= -\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}$$
$$S = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4} \quad \cdots(\text{答})$$

(3)
$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \tan^2 x\,dx - \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \left\{\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx - \frac{\pi}{6}$$
$$= \pi \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{6}$$
$$= \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}$$
$$V = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi^2}{4} \quad \cdots(\text{答})$$