受験番号					
1	2	3	4	5	6

1

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部・医学科〕

コード		得点	1		2		3	
2	0							
7	8		11	12	14	15	17	18

採点欄

1

(1) $D(p, q, r)$ とすると

$p=\dfrac{(-2)\times3+0\times1}{4}=-\dfrac{3}{2}$, $q=\dfrac{3\times3-1\times1}{4}=2$, $r=\dfrac{(-4)\times3+2\times1}{4}=-\dfrac{5}{2}$

よって $D\left(-\dfrac{3}{2}, 2, -\dfrac{5}{2}\right)$ …(答)

(2) $\vec{n}=(k, l, m)$ とすると

$\vec{n}\cdot\vec{OA}=l$, $\vec{n}\cdot\vec{OB}=-l+2m$, $\vec{n}\cdot\vec{OC}=-2k+3l-4m$ であるから

$l=1$, $-l+2m=0$, $-2k+3l-4m=0$ より $k=\dfrac{1}{2}$, $l=1$, $m=\dfrac{1}{2}$

よって $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$ …(答)

(3) Hはα上の点であるから $\vec{OH}=s\vec{OB}+t\vec{OC}=(-2t, -s+3t, 2s-4t)$ と表すことができる。

$\vec{AH}=\vec{OH}-\vec{OA}=(-2t, -s+3t-1, 2s-4t)$

$\vec{AH}\cdot\vec{OB}=5s-11t+1=0$　$\vec{AH}\cdot\vec{OC}=-11s+29t-3=0$ であるから

$s=t=\dfrac{1}{6}$

よって $H\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ …(答)

(4) $\vec{BA}=(0, 2, -2)$　$\vec{BP}=(x, y+1, -2)$,

$|\vec{BA}|=2\sqrt{2}$　$|\vec{BP}|=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2y+5}$,

$\vec{BA}\cdot\vec{BP}=2(y+1)+4=2y+6$ である。

$\angle ABP=45^\circ$ であるから

$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+2y+5}\cdot\cos45^\circ=2y+6$ より

$\sqrt{x^2+y^2+2y+5}=y+3$ …① である。

$\sqrt{x^2+y^2+2y+5}>0$ より $y+3>0$ つまり $y>-3$

①の両辺を2乗して $x^2+y^2+2y+5=(y+3)^2$ より

$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ であり、これは $y>-3$ を満たす。

よって $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ …(答)

受験番号

1 2 3 4 5 6

2

この線より上には解答を記入しないでください。

数学　解答用紙

〔医学部・医学科〕

採点欄 2

(1) $f_1(x) = 1 - \dfrac{\sin^2 x}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ （証明終）

以下 $\sin^2 x = X$ とする

(2) （右辺）$= \left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\theta}\right)\left(1 - \dfrac{X}{\cos^2\theta}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)X + \dfrac{X^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$= 1 - \dfrac{X(1-X)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1 - \dfrac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2}$

$= 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 2\theta} =$ （右辺）　（証明終）

(3) $f_n(x) = \cos 2^n x$ …① とし、数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき (1)より ① は成り立つ

[2] $n=l$ のとき ① が成り立つと仮定すると、$\sin^2 x = X$ として

$f_l(x) = \left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{\pi}{2^{l+1}}}\right)\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{3\pi}{2^{l+1}}}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{2^l-3}{2^{l+1}}\pi}\right)\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{2^l-1}{2^{l+1}}\pi}\right)$

$= \cos 2^l x$ …… ②

$n=l+1$ のとき

$f_{l+1}(x) = \underbrace{\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2^{l+2}}}\right)}_{ア}\underbrace{\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{3\pi}{2^{l+2}}}\right)}_{イ}\cdots\underbrace{\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{2^{l+1}-1}{2^{l+2}}\pi}\right)}_{イ}\underbrace{\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{2^{l+1}-1}{2^{l+2}}\pi}\right)}_{ア}$

$= \underbrace{\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{\pi}{2^{l+2}}}\right)\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{l+2}}\right)}\right)}_{ア} \times \underbrace{\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{3\pi}{2^{l+2}}}\right)\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2^{l+2}}\right)}\right)}_{イ}$

$\times \cdots \times \underbrace{\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\frac{2^l-1}{2^{l+2}}\pi}\right)\left(1 - \dfrac{X}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2^l-1}{2^{l+2}}\pi\right)}\right)}_{ウ}$

$$=\left(1-\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2\times\frac{\pi}{2^{l+2}}}\right)\times\left(1-\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2\times\frac{\pi}{2^{l+2}}}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 2\times\frac{2^l-1}{2^{l+2}}\pi}\right)$$

(∵ ㋐㋑㋒ にそれぞれ (2) の結果を用いた)

$$=\left(1-\frac{\sin^2 2x}{\sin^2\frac{\pi}{2^{l+1}}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 2x}{\sin^2\frac{3\pi}{2^{l+1}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 2x}{\sin^2\frac{2^l-1}{2^{l+1}}\pi}\right)$$

$= f_l(2x)$ 　　(∵ ② より)

$= \cos 2^l\times 2x$

$= \cos 2^{l+1}x$ となり $n=l+1$ のときも ① は成り立つ

[1] [2] より すべて正の整数 n に対して

$f_n(x)=\cos 2^n x$ が成り立つ (証明終)

受験番号

1	2	3	4	5	6

3

この線より上には解答を記入しないでください。

数学 解答用紙

〔医学部・医学科〕

採点欄

3

(1) $y=\cos ax$ は $y'=-a\sin ax$ なので $(t,\cos at)$ における接線 l の方程式は

$$y-\cos at=-a\sin at(x-t)$$

この式で $x=0$ として $y=\cos at+at\sin at$

よって $f(t)=\cos at+at\sin at$ …(答)

(2) $\int at\sin at\,dt=-t\cos at+\int\cos at\,dt=-t\cos at+\frac{1}{a}\sin at+C$, $\int\cos at\,dt=\frac{1}{a}\sin at+C$ (Cは積分定数)

$f=at$ $g'=\sin at$

$f'=a$ $g=-\frac{1}{a}\cos at$

よって $I(a)=\int_0^\pi f(t)dt=\int_0^\pi(\cos at+at\sin at)dt=\left[\frac{2}{a}\sin at-t\cos at\right]_0^\pi$

$$=\frac{2\sin\pi a}{a}-\pi\cos\pi a \ \text{…(答)}$$

(3) $\lim_{a\to+0}I(a)=\lim_{a\to+0}\left(\frac{2\sin\pi a}{a}-\pi\cos\pi a\right)$

$=\lim_{a\to+0}\left(2\pi\frac{\sin\pi a}{\pi a}-\pi\cos\pi a\right)$

$=2\pi-\pi$

$=\pi$ ….(答)